CHAPITRE 11

ESPACES VECTORIELS

I. Généralités

1. $\mathbb{R}$-espaces vectoriels

Définition 11.1

Soit E un ensemble non vide, muni d'une loi de composition interne $+$:

$$+ : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (u, v) & \longmapsto & u + v \end{array}$$

et d'une loi de composition externe $\cdot$:

$$\cdot : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, u) & \longmapsto & \lambda \cdot u \end{array}$$

On dit que le triplet $(E, +, \cdot)$ **est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel** si :

- L'addition $+$ vérifie les règles suivantes :
  i) $\exists v \in E$ tel que $\forall u \in E$, $u + v = v + u = u$. v est alors unique et on note $v = 0_E$ (0_E est **l'élément neutre** pour l'addition, 0_E est appelé **vecteur nul de** E).
  ii) $\forall u \in E, \exists v \in E, u + v = v + u = 0_E$, on note alors $v := -u$ (tout élément de
  iii) $\forall u, v, w \in E$, $(u + v) + w = u + (v + w)$ (l'addition est **associative**)
  iv) $\forall u, v \in E$, $u + v = v + u$ (l'addition est **commutative**). E admet un opposé).
- La multiplication $\cdot$ vérifie les règles suivantes :
  i) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall u \in E$, $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$ (associativité)
  ii) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall u \in E$, $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$ (distributivité 1)
  iii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall u, v \in E$, $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$ (distributivité 2)
  iv) $\forall u \in E$, $1 \cdot u = u$ (1 est **l'élément neutre pour la multiplication externe**).

Les éléments de E s'appellent alors des vecteurs et les éléments de $\mathbb{R}$ s'appellent des **scalaires**.

Remarque

Il existe aussi des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels dans lesquels les scalaires sont les nombres complexes, et plus généralement pour un corps $\mathbb{K}$ quelconque on parle de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Le programme de BL se limite aux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

Remarque

La définition d'espace vectoriel est très générale et ne correspond pas seulement à la notion géométrique de vecteur. La notion d'espace vectoriel sert à étudier les propriétés commune de tous les ensembles pour lesquels il existe une manière naturelle d'additionner ses éléments et de les multiplier par un réel.

Propriété 11.1

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Alors :

- $\forall u \in E, 0 \cdot u = 0_E$
- $\forall u \in E, (-1) \cdot u = -u$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in E, \lambda \cdot u = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 0$ ou $u = 0_E$.

2. Exemples d'espaces vectoriels

a. Structure d'espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$

Proposition 11.2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $E = \mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ fois}}$. Les opérations suivantes font de $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

- **Addition** : pour tout $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et tout $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on définit $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ par
$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$
- **Produit par un réel** : pour tout $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit $\lambda \cdot \boldsymbol{x}$ par
$$\lambda \cdot \boldsymbol{x} := (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n)$$

Remarque

On peut penser à $\mathbb{R}^2$ comme à l'ensemble des vecteurs d'un plan et à $\mathbb{R}^3$ comme à l'ensemble des vecteurs d'un espace en 3 dimensions. L'intuition géométrique en dimension 2 et 3 peut souvent se généraliser à la dimension n.

b. Espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$

Proposition 11.3

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ muni de la somme et du produit habituels est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
L'ensemble $\mathbb{R}[X]$ muni des opérations habituelles est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Remarque

Le vecteur nul de $\mathbb{R}_n[X]$ est le polynôme nul.

c. Espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$

Proposition 11.4

Pour tout $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$, l'ensemble $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ muni de la somme et du produit habituel est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Remarque

Le produit évoqué ici est le produit d'une matrice par un réel, pas le produit de deux matrice entre elles. Il n'y a pas de notion de produit de deux vecteurs entre eux dans la définition d'espace vectoriel.

Remarque

Le vecteur nul de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ est la matrice nulle de taille $n \times m$.

d. Espaces de fonctions

Proposition 11.5

Soit $A \subset \mathbb{R}$, et soit $E = \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de A dans $\mathbb{R}$, muni de la somme et du produit habituels.
Alors E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Proposition 11.6

Soit I un intervalle, et soit $E = \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$, muni de la somme et du produit habituel. Alors E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Remarque

Le vecteur nul de ces deux espaces vectoriels est la fonction nulle $A \to \mathbb{R}, x \mapsto 0$

e. Contre-exemples

Exemple 11.1

$\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$, muni des opérations habituels, ne sont pas des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. En effet, si $n \in \mathbb{Z}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on n'a pas nécessairement $\lambda n \in \mathbb{Z}$.

Exemple 11.2

L'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré n muni des opérations habituelles n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. En effet, si P et Q sont deux polynômes de degré n, $P+Q$ n'est pas nécessairement de degré n (mais $\deg(P+Q) \leq n$).

II. Sous-espaces vectoriels

1. Combinaison linéaire

Définition 11.2

Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et soient $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ deux vecteurs. On dit que $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont colinéaires s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\boldsymbol{u} = \lambda \cdot \boldsymbol{v}$ ou $\boldsymbol{v} = \lambda \cdot \boldsymbol{u}$.

Exemple 11.3

Dans $E = \mathbb{R}^3$, les vecteurs $u = (3,-9,6)$ et $v = (-2,6,-4)$ sont colinéaires, en effet $u = -\dfrac{3}{2} \cdot v$.

Exemple 11.4

Si E est l'ensemble des fonction continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors exp et sin ne sont pas colinéaires.
En effet, s'il existait $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x) = \lambda \cdot \sin(x)$, alors on aurait $\exp(0) = \lambda \times \sin(0) = 0$, or $\exp(0) > 0$ contradiction. S'il existait $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin = \lambda \cdot \exp(x)$, on aurait $\lambda \exp(0) = \lambda = \sin(0) = 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x) = 0 \cdot \exp(x) = 0$. Or sin n'est pas la fonction nulle, contradiction.

Remarque

Le vecteur nul 0_E est colinéaire avec tous les vecteurs de E, en effet pour tout $u \in E$ on a $0_E = 0 \cdot u$.

Définition 11.3

Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et soit $(u_1,\ldots,u_p)$ est une famille de p vecteurs de E. On dit qu'un vecteur v est une **combinaison linéaire des vecteurs** $u_1,\ldots,u_p$ s'il existe des réels $\lambda_1, ..., \lambda_p$ tels que

$$v = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k u_k = \lambda_1 \cdot u_1 + \cdots + \lambda_p \cdot u_p$$

Définition 11.4

On note $\mathrm{Vect}\left(u_1,\ldots,u_p\right)$ l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de la famille $(u_1,\ldots,u_p)$:

$$\mathrm{Vect}\left(u_1,u_2,\ldots,u_p\right) = \{\lambda_1 \cdot u_1 + \cdots + \lambda_p \cdot u_p \mid (\lambda_1,\ldots,\lambda_p) \in \mathbb{R}^p\}$$

De façon plus générale, si $A \subset E$, on note $\mathrm{Vect}(A)$ l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'éléments de A :

$$\mathrm{Vect}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot u_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^*, (u_1,\ldots,u_n) \in A^n, (\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n \right\}$$

→ **Exercice de cours n° 1.**

→ **Exercice de cours n° 2.**

2. Sous-espace vectoriel

a. Généralités

Définition 11.5

Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et soit $F\subset E$ une partie de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si

- F est non vide.
- $\forall u,v\in F,\ u+v\in F$
- $\forall \lambda\in\mathbb{R},\forall u\in F,\ \lambda\cdot u\in F$

Dans ce cas, F hérite des lois de E et $(F,+,\cdot)$ est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Proposition 11.7

Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et F une partie non vide de E, alors F est un sous-espace vectoriel de E si

$$\forall(u,v)\in F^2,\ \forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \lambda\cdot u+\mu\cdot v\in F$$

On dit dans ce cas que F est **stable par combinaison linéaire**.

Remarque

Pour prouver que quelque chose est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, il est souvent plus simple de montrer que c'est un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel connu (2 conditions à vérifier) plutôt que de montrer qu'il respecte les 8 conditions de la définition.

Exemples 11.5

- Si $(E,+,\cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $\{0_E\}$ et E sont des sous-espace vectoriel de E. Un espace vectoriel qui ne contient que le vecteur nul est appelé l'**espace vectoriel trivial**.
- L'ensemble des matrices diagonales, des matrices triangulaires supérieures et des matrices triangulaires inférieures de taille n sont des sous-espace vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- Si $n<m$, $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_m[X]$.
- L'ensemble $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Propriété 11.8

Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $0_E\in F$ et on a $0_F=0_E$.

Remarque

$0_E\in F$ est une condition nécessaire mais non suffisante pour que F soit un sous-espace vectoriel de E, cette condition est parfois utile pour montrer rapidement qu'un ensemble n'est pas un sous-espace vectoriel.

$\rightarrow$ **Exercice de cours n° 3.**

$\rightarrow$ **Exercice de cours n° 4.**

$\rightarrow$ **Exercice de cours n° 5.**

Propriété 11.9

Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espace vectoriel de E. Alors

- $F\cap G$ est un sous-espace vectoriel de E
- $F\cup G$ n'est en général pas un sous-espace vectoriel de E

$\rightarrow$ **Exercice de cours n° 6.**

b. Espaces vectoriels engendrés

Propriété 11.10

Soit E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E.

- Si $u_1, \dots, u_p \in F$, alors $\text{Vect}\left(u_1, u_2, \dots, u_p\right) \subset F$.
- Si $A \subset F$, alors $\text{Vect}(A) \subset F$.

Propriété 11.11

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel. Soient $u_1, ..., u_p \in E$ et soit $A \subset E$. Alors,

- $\text{Vect}\left(u_1, \dots, u_p\right)$ est un sous-espace vectoriel de E appelé **sous-espace vectoriel engendré par** $u_1, ..., u_p$
- $\text{Vect}(A)$ est un sous-espace vectoriel de E appelé **sous-espace vectoriel engendré par** A

c. Solutions d'un système homogène

Propriété 11.12

L'ensemble des solutions d'un système homogène S_0 de n équations à p inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$.

Remarque

Si S_0 est un système homogène à p inconnues, qu'on note S l'ensemble des solutions de S_0 et qu'on note $S_1, S_2, ..., S_n$ l'ensemble des solutions de chaque ligne du système dans $\mathbb{R}^p$, alors $\forall k \in [\![1, n]\!]$, S_k est un sous-espace vectoriel de R^p et $S = \bigcap_{k=1}^n S_k$ est une intersection de s-e.v. donc est un s-e.v.

Remarque

Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ peuvent souvent s'écrire ou bien comme solutions d'un système d'équations, ou bien comme sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs. Dans l'exercice suivant, on apprend à passer de l'un à l'autre.

→ **Exercice de cours n°7.**

d. Droites vectorielles

Définition 11.6

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, une droite vectorielle de E est un sous espace vectoriel D de E tel qu'il existe un vecteur $u \in E$ non nul vérifiant $D = \text{Vect}(u)$. On dit que x **dirige** la droite D. Une droite vectorielle de E est un sous-espace vectoriel de E de la forme $\{t \cdot u \mid t \in R\}$ où u est un vecteur fixé non nul.

3. Sous-espace vectoriels de $\mathbb{R}^2$

Proposition 11.13

Les seuls sous-espaces vectoriels de $E = \mathbb{R}^2$ sont $\left\{0_{\mathbb{R}^2}\right\}$, $\mathbb{R}^2$ et les droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$.

Propriété 11.14

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et soit $D = \text{Vect}((a, b))$.

1. **Une représentation paramétrique de D** est le système $\left\{\begin{array}{lll} x & = & ta \\ y & = & tb \\ t & \in & \mathbb{R} \end{array}\right.$, c'est à dire que $(x, y) \in D$ si et seulement si il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que (x, y) est solution du système $\left\{\begin{array}{lll} x & = & ta \\ y & = & tb \end{array}\right.$.
2. Une **équation cartésienne de D** est $bx - ay = 0$, c'est à dire que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x, y) \in D \iff bx - ay = 0$.

Remarque

La droite vectorielle d'équation cartésienne $ax + by = 0$ est engendré par le vecteur $(-b, a)$.

III. Dimension

1. Famille génératrice

Définition 11.7

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et soit $(e_1,\dots,e_p)$ une famille finie de vecteurs de E. On dit que $(e_1,\dots,e_p)$ est une **famille génératrice de** E si

$$\forall u\in E, \exists(\lambda_1,\dots,\lambda_p)\in\mathbb{R}^p,\ u=\sum_{k=1}^{p}\lambda_k e_k=\lambda_1\cdot e_1+\dots+\lambda_p\cdot e_p$$

Remarque

- $(e_1,\dots,e_p)$ est une famille génératrice de E si et seulement si $E=\mathrm{Vect}\left(e_1,...,e_p\right)$
- Si on rajoute un vecteur quelconque à une famille génératrice, elle reste une famille génératrice.

Exemple 11.6

On considère $E=\mathbb{R}^n$ et la famille $(e_1,...,e_n)$ définie par

$$e_1=(1,0,0,\dots,0)\quad,\quad e_2=(0,1,0,\dots,0)\quad,\quad e_3=(0,0,1,0,\dots0)\quad,\quad\cdots\quad,\quad,e_n=(0,0,\dots,0,1)$$

Alors $(e_1,e_2,\dots,e_n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$. En effet, pour tout vecteur $u=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ on a

$$u=x_1\cdot e_1+x_2\cdot e_2+\dots+x_n\cdot e_n$$

→ **Exercice de cours n° 8.**

Propriété 11.15

Soit $(e_1,e_2,\dots,e_p)$ une famille génératrice de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Alors $p\geq n$.

2. Famille libre

Définition 11.8

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Une famille $(e_1,e_2,\dots,e_p)$ de p vecteurs de E est dite **libre** si

$$\forall(\lambda_1,...,\lambda_p)\in\mathbb{R}^p,\quad \lambda_1\cdot e_1+\dots+\lambda_p\cdot e_p=0_E\Longrightarrow\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_p=0$$

Dans le cas contraire, on dit que la famille $(e_1,\dots,e_p)$ est **liée**.

Remarque

La famille $(e_1,e_2,\dots,e_p)$ est liée s'il existe un p-uplet de réels $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_p$ non tous nuls tels que

$$\lambda_1\cdot e_1+\lambda_2\cdot e_2+\dots+\lambda_p\cdot e_p=0_E$$

On peut alors exprimer au moins un des vecteurs de cette famille comme une combinaison linéaire des autres : si $\lambda_i\neq0$ on a

$$e_i=-\frac{\lambda_1}{\lambda_i}e_1-\frac{\lambda_2}{\lambda_i}e_2-\dots-\frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}e_{i-1}-\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}e_{i+1}-\dots-\frac{\lambda_n}{\lambda_i}e_n$$

Ainsi, une famille liée est une famille dans laquelle l'un des vecteurs peut s'exprimer comme combinaison linéaire des autres. Une famille libre est donc **une famille dans laquelle aucun vecteur ne peut s'exprimer comme combinaison linéaire des autres.** En particulier dans une famille libre aucun vecteur n'est nul.

Exemple 11.7

Dans $E=\mathbb{R}^n$, la famille $(e_1,e_2,\dots,e_n)$ définie par

$$e_1=(1,0,0,\dots,0)\quad,\quad e_2=(0,1,0,\dots,0)\quad,\quad e_3=(0,0,1,0,\dots0)\quad,\quad\cdots\quad,\quad,e_n=(0,0,\dots,0,1)$$

est libre. En effet, soient $(\lambda_1,...,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$ tel que $\lambda_1e_1+\dots+\lambda_ne_n=0_{\mathbb{R}^n}=(0,...,0)$, alors $(\lambda_1,0,...,0)+(0,\lambda_2,0,...,0)+\dots+(0,0,...,0,\lambda_n)=0_{\mathbb{R}^n}$ donc $(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)=0_{\mathbb{R}^n}$ et finalement $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_n$.

→ **Exercice de cours n° 9.**

→ **Exercice de cours n° 10.**

Remarque

- Une famille de 1 vecteur est libre si et seulement si ce vecteur est non nul.
- Une famille de 2 vecteurs non nuls est libre si et seulement si ils sont non colinéaires.
- Dans $\mathbb{R}^3$ identifié à l'espace muni d'un repère, une famille de 3 vecteurs est libre si et seulement si ils sont non coplanaires.
- Si on enlève un vecteur à une famille libre, elle reste libre.

Proposition 11.16

Soit $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ une famille libre de $\mathbb{R}^n$, alors $p \leq n$.

Proposition 11.17

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel quelconque. Une famille génératrice de E a au moins autant d'éléments qu'une famille libre de E. Autrement dit, si $(e_1, e_2, ..., e_p)$ est une famille génératrice de E et que $(f_1, f_2, ..., f_r)$ est une famille libre de E, alors $r \leq p$.

3. Base

Définition 11.9

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Une **base** de E est une famille de vecteurs qui est à la fois **génératrice** de E et **libre**.

Exemple 11.8

Dans $E = \mathbb{R}^n$, la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ définie par

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0) \quad , \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0) \quad , \quad e_3 = (0, 0, 1, 0, \dots 0) \quad , \quad \cdots \quad , \quad , e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$$

est une base de $\mathbb{R}^n$ appelée **base canonique de** $\mathbb{R}^n$**.** En effet, on a vu dans les exemples 1 et 2 que c'était une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$ et qu'elle était libre.

→ **Exercice de cours n° 11.**

Propriété 11.18

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors tout vecteur u de E peut s'écrire de façon unique comme une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}$:

$$\forall u \in E, \exists!(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^p, \quad u = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot e_k = x_1 \cdot e_1 + \cdots + x_n \cdot e_n$$

on dit alors que $(x_1, \dots, x_n)$ sont les coordonnés de u dans la base $\mathcal{B}$.

4. Dimension

Théorème 11.19 (de la base incomplète)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $\mathcal{L} = (e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de E qui n'est pas génératrice et soit $\mathcal{G} = (f_1, f_2, \dots, f_r)$ une famille génératrice de E. Alors, on peut ajouter certain vecteurs de la famille $\mathcal{G}$ à la famille $\mathcal{L}$ de sorte que $\mathcal{L}$ devienne une base de E.

Remarque

On déduit de ce théorème que dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par une famille finie,

- Toute famille libre peut être complétée en une base.
- De toute famille génératrice on peut extraire une base.

La propriété suivante est une conséquence du théorème de la base incomplète (mais pas seulement).

Proposition 11.20 (admise)

Tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel E non trivial admet une base.

Proposition 11.21

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments.
Autrement dit, si $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ et $(f_1, f_2, \dots, f_r)$ sont deux bases de E, alors $p = r$.

Définition 11.10

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle **dimension** de E et on note $\dim(E)$ le cardinal d'une base de E.

Remarque

Ce nombre est bien défini et ne dépend pas de la base choisie d'après les propositions précédente.

Propriété 11.22

- Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.
- Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ de dimension 1 sont les droites vectorielles.
- Une base de l'espace vectoriel trivial $\{0\}$ est la famille vide $\varnothing$, donc $\dim(\{0\}) = 0$.

Proposition 11.23

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et soit $n = \dim(E)$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une famille de vecteurs de E.

- Si $\mathcal{B}$ est libre alors $p \leq n$ avec égalité si et seulement si $\mathcal{B}$ est une base de E.
- Si $\mathcal{B}$ est génératrice de E,alors $p \geq n$ avec égalité si et seulement si $\mathcal{B}$ est une base de E.

On en déduit la proposition suivante :

Proposition 11.24

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Si $n = \dim(E)$ et que $\mathcal{B}$ est une famille de n vecteurs de E :

- Si $\mathcal{B}$ est libre, alors c'est une base de E
- Si $\mathcal{B}$ est génératrice, alors c'est une base de E.

Propriété 11.25

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors $\dim(F) \leq \dim(E)$.

Proposition 11.26

Si F est un sous-espace vectoriel de E et que $\dim(E) = \dim(F)$, alors $E = F$.

5. Bases de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$

Propriété 11.27

Soit $n \in \mathbb{N}$. La famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Remarque

On a donc $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$.

Définition 11.11

Une famille $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ est dite **échelonnée en degré** si $\deg(P_1) < \deg(P_2) < \cdots < \deg(P_n)$

Proposition 11.28

Si une famille $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ de polynômes non nuls de $\mathbb{R}[X]$ est échelonnée en degré, alors elle est libre.

→ **Exercice de cours n° 12.**

Propriété 11.29

Soit $(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Si pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]$ on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la i-ème ligne et j-ème colonne qui vaut 1, alors $\left(E_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.

Remarque

On a donc $\dim\left(\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})\right) = nm$ et $\dim\left(\mathcal{M}_{n}(\mathbb{R})\right) = n^2$.

Remarque

La base $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ et la base $(E_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}}$ de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ s'appellent aussi **bases canoniques** de leurs espaces vectoriels respectifs.

Définition 11.12

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que

- A est **symétrique** si ${}^tA = A$, c'est à dire si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} = a_{j,i}$
- A est **antisymétrique** si ${}^tA = -A$, c'est à dire si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} = -a_{j,i}$.

→ Exercice de cours n° 13.

IV. Applications linéaires.

1. Généralités

Définition 11.13

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite **linéaire** si

- $\forall (u,v) \in E^2,\ f(u+v) = f(u) + f(v)$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in E,\ f(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot f(u)$

On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linaires de E dans F.

Proposition 11.30

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Une application $f : E \longrightarrow F$ est linéaire si et seulement si

$$\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (u,v) \in E^2, \quad f(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) = \lambda \cdot f(u) + \mu \cdot f(v)$$

ou de façon équivalente si et seulement si

$$\forall \mu \in \mathbb{R}, \forall (u,v) \in E^2, \quad f(u + \mu \cdot v) = f(u) + \mu \cdot f(v)$$

Exemples 11.9

- L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$ est linéaire.
- L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & {}^tA \end{array}$ est linéaire.
- L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y) \end{array}$ est linéaire.

Propriété 11.31

Si $f : E \longrightarrow F$ est une application linéaire, alors $f(0_E) = 0_F$.

Remarque

Cette propriété fournit une condition facile à vérifier, nécessaire (mais non suffisante) pour qu'une application soit linéaire.

→ **Exercice de cours n° 14.**

2. Opérations

Propriété 11.32

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Soient f et g deux applications linéaires de E vers F et soit k un réel.

- On définit $f+g$ sur E par $\forall x \in E,\ (f+g)(x) = f(x)+g(x)$.
- On définit $k\cdot f$ sur E par $\forall x \in E,\ (k\cdot f)(x) = k\cdot f(x)$.

Alors $f+g$ et $\lambda \cdot f$ sont des applications linéaires de E vers F.

Proposition 11.33

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Alors $\mathcal{L}(E,F)$ muni des opérations $+$ et $\cdot$ définie dans la propriété ci-dessus est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

De même, la composée de deux applications linéaires, si elle est bien définie, est une application linéaire :

Propriété 11.34

Soient E, F et G trois espaces vectoriels, et soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors $g\circ f \in \mathcal{L}(E,G)$.

Définition 11.14

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle **formes linéaires** les éléments de $\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$.

Remarque

On rappelle que $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1.

Exemple 11.10

L'application $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y,z) \mapsto x-2y+3z$ est une forme linéaire.

Exemple 11.11

L'application $\mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R},\ P \longmapsto P(0)$ est une forme linéaire.

Exemple 11.12

L'application $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},\ M \longmapsto \mathrm{tr}(M)$ est une forme linéaire.

3. Image et noyau

Définition 11.15

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

- On appelle **noyau de** f et on note $\mathrm{Ker}(f)$ l'ensemble des antécédents de 0_F par f :

$$\mathrm{Ker}(f) := \left\{x \in E \mid f(x) = 0_F\right\} = f^{-1}(\{0_F\})$$

- On appelle **image de** f et on note $\mathrm{Im}(f)$ l'ensemble image de E par f :

$$\mathrm{Im}(f) := \left\{f(x) \mid x \in E\right\} = \left\{y \in F \mid \exists x \in E, y = f(x)\right\} = f(E)$$

Propriété 11.35

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espace vectoriel et soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors

- $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E
- $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F

→ **Exercice de cours n° 15.**

4. Injection, surjection, bijection

Propriété 11.36

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors f est injective si et seulement si $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$

→ **Exercice de cours n° 16.**

Propriété 11.37

$f \in \mathcal{L}(E,F)$ est une surjection si et seulement si $\text{Im}(f) = F$

Définition 11.16

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Si f est bijective, alors $f^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$. On dit alors que f est un **isomorphisme** de E vers F, et on dit que E et F sont **isomorphes**.

Remarque

Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est injective, alors f est une bijection de E vers $f(E)$. En effet, f est une surjection de E vers $f(E)$ par définition, donc il suffit qu'elle soit injective pour que ce soit une bijection.

Propriété 11.38

Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$ sont deux isomorphismes, alors $g \circ f$ est un isomorphisme. Son isomorphisme réciproque est $f^{-1} \circ g^{-1}$.

5. Endomorphismes

Dans toute cette section E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Définition 11.17

Un **endomorphisme** de E est une application linéaire de E dans E (*endo* = dans, à l'intérieur). On note $\mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E,E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

Remarque

En plus des opérations + et ·, on a $\forall (f,g) \in (\mathcal{L}(E))^2, f \circ g \in \mathcal{L}(E)$ et $g \circ f \in \mathcal{L}(E)$.
On dit que f et g commutent si $f \circ g = g \circ f$

Définition 11.18

On note Id_E l'endomorphisme **identité**, défini sur E par

$$\begin{array}{rccc} \text{Id}_E & : E & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & x \end{array}$$

qui est trivialement une application linéaire de E vers E.

Définition 11.19

Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est bijective, on dit que f est un **automorphisme** de E.

Exemple 11.13

- L'application id_E est un automorphisme de E, son automorphisme réciproque est elle-même.
- L'application $f : E \to E, x \mapsto -x$ est un automorphisme de E, son automorphisme réciproque est elle même.

Propriété 11.39

Si $f, g \in \mathcal{L}(E)$ sont deux automorphismes de E, alors $g \circ f$ est un automorphisme de E, et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Définition 11.20

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On note par convention $f^0 = \mathrm{id}_E$, et pour on définit par récurrence f^p par $f^p = f \circ f^{p-1}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

Définition 11.21

Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit **nilpotent** s'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p = 0$.

Propriété 11.40

Soient $f, g, h \in \mathcal{L}(E)$, alors $f \circ (g+h) = f \circ g + f \circ h$ et $(f+g) \circ h = f \circ h + g \circ h$.

Propriété 11.41

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Si f et g commutent, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k}$$

6. Applications linéaires et dimensions

Remarque

Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

- Une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est **entièrement déterminée** par la donnée de $f(e_1)$,..., $f(e_n)$.
  En effet, tout vecteur $u \in E$ peut s'écrire $u = x_1 \cdot e_1 + \cdots + x_n \cdot e_n$ où $x_1, \dots, x_n$ sont des réels, donc $f(u) = x_1 \cdot f(e_1) + \cdots + x_n \cdot f(e_n)$ par linéarité de f.
- On a $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$ mais $f(e_1), \dots, f(e_n)$ n'est pas nécessairement une base de F (cette famille peut être liée). On a donc $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leq \dim(E)$ et $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leq \dim(F)$.

Définition 11.22

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On appelle **rang** de f et on note $\mathrm{rg}(f)$ l'entier $\mathrm{rg}(f) = \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big)$.

Remarque

D'après la remarque précédente $\mathrm{rg}(f) \leq \min(\dim(E), \dim(F))$.

Théorème 11.42 (du rang)

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel quelconque, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f) = \dim(E)$$

→ **Exercice de cours n° 17.**

Propriété 11.43

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors

- f est injective si et seulement si l'image d'une base de E par f est une famille libre
- f est surjective si et seulement si l'image d'une base de E par f est une famille génératrice de F
- f est bijective si et seulement si l'image d'une base de E par f est une base de F.

Propriété 11.44

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, et soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

- Si f est injective, alors $\dim(E) \leq \dim(F)$
- Si f est surjective, alors $\dim(E) \geq \dim(F)$

Propriété 11.45

Si E et F sont deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, alors $\dim(E) = \dim(F)$ si et seulement si il existe un isomorphisme de E vers F

Remarque

Deux conséquences importantes de cette proposition :

- Tout espace vectoriel de dimension n est donc isomorphe à $\mathbb{R}^n$.
- Il n'existe pas d'isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ si $n \neq m$.

Remarque

$\mathbb{R}_n[X]$ est isomorphe à $\mathbb{R}^{n+1}$ par l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ (a_0, a_1, \dots, a_n) & \longmapsto & P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \end{array}$

$\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ est isomorphe à $\mathbb{R}^{nm}$ par l'application : $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^{nm} \\ A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq m}} & \longmapsto & \left(a_{1,1}, \dots, a_{1,m}, a_{2,1}, \dots, a_{2,m}, \dots, a_{n,m}\right) \end{array}$

Propriété 11.46

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim(E) = \dim(F) = n$. Pour tout $f \in \mathcal{L}(E, F)$, les 6 propositions suivantes sont toutes équivalentes entre elles :

i) f est injective

ii) f est surjective

iii) f est bijective

iv) $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$

v) $\mathrm{Im}(f) = F$

vi) $\mathrm{rg}(f) = n$

→ **Exercice de cours n° 18.**

→ **Exercice de cours n° 19.**

Propriété 11.47

Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension fini.

- Si $f \in \mathcal{L}(E)$, alors f est inversible si et seulement si il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g = \mathrm{id}_E$ ou $g \circ f = \mathrm{id}_E$
- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\dim(E) = \dim(F)$, alors f est inversible si et seulement si il existe $g \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ ou $f \circ g = \mathrm{id}_F$.

Remarque

Cette dernière propriété est fausse si $\dim(E) \neq \dim(F)$. Prenons par exemple

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x, y, 0) \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x, y) \end{array}$$

f et g sont linéaires et $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ mais f n'est pas surjective et g n'est pas injective.

Exercices de cours

Exercice 1

On pose $E = \mathbb{R}^3$, $u = (1,1,3)$, $v = (4,1,2)$ et $w = (5,-2,1)$.
Déterminer si le vecteur $x = (-6,-1,8)$ appartient à $\mathrm{Vect}(u,v,w)$.

Exercice 2

On considère $E = \mathbb{R}^3$, $u = (2,1,-1)$, $v = (3,0,1)$ et $w = (5,1,0)$ trois vecteurs de E.
Les vecteurs $x = (-1,1,-2)$ et $y = (4,1,2)$ appartiennent-ils à $\mathrm{Vect}(u,v,w)$?

Exercice 3

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x+2y-5z = 0\}$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 4

On considère E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $F = \{f \in E \mid f(1) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 5

Déterminer dans chaque cas si F est un sous-espace vectoriel de E :

1. $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1+x_2+x_3+x_4 = 2\}$
2. $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$
3. $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 3z\}$
4. E est l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et $F = \{f \in E \mid f(0) = 1\}$.

Exercice 6

Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 7

Soit $E = \mathbb{R}^3$. On considère les sous-espaces vectoriels $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y-z = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}((1,-1,2))$. Écrire F comme sous-espace vectoriel de E engendré par une famille de vecteurs, et G comme solution d'un système d'équations.

Exercice 8

Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. On pose $e_1 = (1,-1,0)$ et $e_2 = (1,0,-1)$. Montrer que (e_1,e_2) est une famille génératrice de F.

Exercice 9

Dans $E = \mathbb{R}^3$, montrer que la famille $((1,2,1),(3,1,2),(4,1,1))$ est libre.

Exercice 10

Soit E l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, soient $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ des réels et soient $f_1, f_2, \ldots f_n$ les fonctions de E définies par $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_i(x) = \mathrm{e}^{a_i x}$. Montrer que $f_1, f_2, \ldots, f_n$ est une famille libre de E.

Exercice 11

On considère les parties F et G de $\mathbb{R}^4$ définies par

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - 6y + 4z - 2t = 0\} \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}\,((1,1,1,0),(0,1,1,-1)) \subset \mathbb{R}^4$$

1. Montrer que $\dim(G) = 2$
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$
3. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de F.

Exercice 12

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $(1, X+1, X^2+X+1, \cdots, X^n + X^{n-1} + \cdots + X + 1)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$
2. Décomposer le polynôme $X^3 - X^2$ dans la base $(X^3 + X^2 + X + 1, X^2 + X + 1, X + 1, 1)$.

Exercice 13

Notons $S_n(\mathbb{R})$ (resp. $A_n(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) à coefficients réels.

1. Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
2. Montrer que la réunion de la famille $\left(E_{i,i}\right)_{1\le i\le n}$ et de la famille $\left(E_{i,j} + E_{j,i}\right)_{1\le i<j\le n}$ est une base de $S_n(\mathbb{R})$. En déduire $\dim\left(S_n(\mathbb{R})\right)$.
3. Montrer que la famille $\left(E_{i,j} - E_{j,i}\right)_{1\le i<j\le n}$ est une base de $A_n(\mathbb{R})$. En déduire $\dim\left(A_n(\mathbb{R})\right)$.

Exercice 14

On considère l'application φ suivante :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (5x - y, 2x) \end{array}$$

Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.

Exercice 15

Soit $\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(x, y, z, t) = (x + y - t\ ,\ y - z + t)$. On admet que φ est linéaire. Déterminer une base de $\text{Ker}(\varphi)$ et de $\text{Im}(\varphi)$.

Exercice 16

Montrer que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x + y, x - y, x)$ est une application linéaire injective.

Exercice 17

On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $(x, y, z) \mapsto (x + z, 0, y - z, 0)$. En vous aidant du théorème du rang, déterminer $\text{Ker}(f)$ puis $\text{Im}(f)$.

Exercice 18

Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (x + y + z, 2x - z, x - y + 2z)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 19

Montrer que l'application $\mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3, P \mapsto \left(P(0), P'(0), P''(0)\right)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.